Développement : Système proie prédateur de Lotka-Volterra

RM

2022-2023

Références

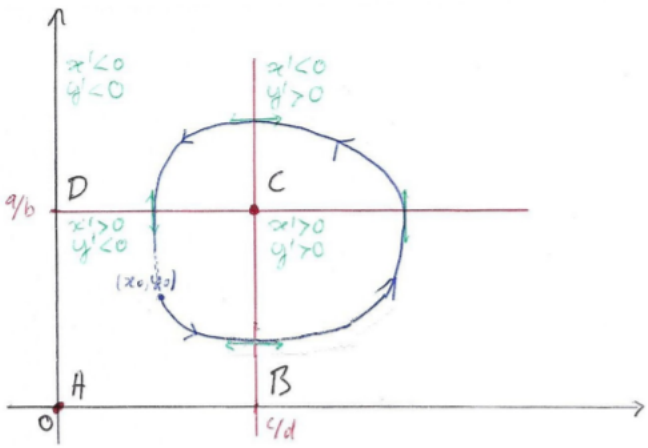
1. Oraux X-ENS tome 4 analyse p 250
2. A voir

Énoncé :

On considère le système suivant dit proies-prédateurs de Lotka-Volterra

$$\begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -cy + dxy \end{cases}$$

Avec $a, b, c, d > 0$ et comme condition initiale $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ tel que $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$.
Alors ce système de Cauchy admet une solution maximal global et périodique.De plus, nous pouvons prédire l'allure de la courbe $t \mapsto (x(t), y(t))$



Énoncé du livre/plan :

1. Interprétation du système différentielle ou $x(t)$ est la proie (sardine) et $y(t)$ le prédateur (requin).
2. Soit $X(t) = (x(t), y(t))$ la solution maximal. On montre que x, y à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. On pose $H(x, y) = dx + by - c \ln x - a \ln y$ et on montre que c'est une intégrale première du système sur $(R_+^*)^2$. On en déduit enfin que la solution maximal X est définie sur $\mathbb{R}$.
3. On montre ensuite que x et y sont périodiques en séparant le graphe en 4 zones.
4. Comment modéliser l'influence de la pêche + valeur moyenne.

Résolution :

1. Si $x(t)$ la population de sardine au cours du temps, on considère un taux de croissance de a et donc $x' = ax$. Mais comme il y a des requins, on perds proportionnellement plus de sardine s'il y a plus de requins et plus de sardine car il y a plus de proie pour les prédateurs. On a donc un coefficient b et on a bien $x' = ax - bxy$.
   Pour les requins, si il n y a pas de sardine à manger, alors leur nombre décroit et on a donc un coefficient c tel que $y' = -cy$. Mais en présence de proie, alors leur nombre augmente proportionnellement au nombre de sardine. On a donc bien $y' = -cy + dxy$.
   Enfin, on a $(x', y') = F(x, y)$ ou $F(x, y) = (ax - bxy, -cy + dxy)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous assure l'existence d'une unique solution maximale sur un intervalle $J =]T^-, T^+[$ de $\mathbb{R}$.

2. On va cherche à appliquer le théorème d'explosion en temps finis pour la maximalité de la solution sur $\mathbb{R}$.
   Montrons d'abords que pour tout $t \in j$, on a $x(t), y(t) > 0$.
   Supposons qu'il existe $t_1 \in J$ tel que $x(t_1) = 0$. Mais alors $x(t) = 0$ et $y(t) = y(t_1)e^{-c(t-t_1)}$ est solution du système et coïncide avec (x, y) en t_1. Par unicité, on en déduit que $x(t) = 0$ pour tout t. Mais on a supposé que $x_0 = x(0) > 0$ ce qui est donc absurde. On en déduit que il n'existe aucun $t_1 \in J$ tel que $x(t_1) = 0$. Alors du théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que $\forall t \in J, x(t) > 0$. Il est de même pour y et donc on motre de la même manière que $y > 0$. Nous avons alors déjà une minoration de x, y.
   On pose donc $H(x, y) = dx + by - c\ln x - a\ln y$.

   > Nous allons montrer que la trajectoire d'une solution du problème est incluse dans une ligne de niveaux de H. Ce faisant, avoir des informations sur cette courbe nous permet d'en avoir sur notre solution.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) &= dx' + by' - c\frac{x'}{x} - a\frac{y'}{y} \\ &= d(ax - bxy) + b(-cy + dxy) - ca + bcy + ac - adx = 0 \end{aligned}$$

   Donc H est constante sur la trajectoire des solution.
   Considérons les fonctions f et g sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = dx - c\ln x$ et $g(x) = bx - a\ln x$.
   La fonction f possède un minimum $m = f(\frac{c}{d})$ et g un minimum $m' = g(\frac{a}{b})$. On remarque que $H(x, y) = f(x) + g(y)$.
   D'après ce qui précède, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in J$, on a $H(x(t), y(t)) = f(x(t)) + g(y(t)) = c$.
   On a donc que pour tout $t \in J$, $f(x(t)) = c - g(y(t)) \leq c - m'$.
   Or $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Donc on en déduit que il existe α et β strictement positif tel que, pour tout $t \in J$, $\alpha \leq x(t) \leq \beta$. On démontre de même pour y.
   Et donc en appliquant le théorème d'explosion en temps finie, on en déduit que la solution est global, et donc que $J = \mathbb{R}$.

   > car on a : x est une solution maximale sur $]T_1, T_2[$ ssi : $\sup I = T_2$ ou $\lim\limits_{t\to T_2} \|x(t)\| = +\infty$. O comme on vient de montrer que le deuxième cas est impossible, alors il ne reste que le 1er et comme $I = \mathbb{R}$, on a bien que $T_2 = +\infty$ et finalement $J = \mathbb{R}$

3. On va séparer les graphes en 4 zones : en considérant les deux points d'équilibres $(0, 0)$ et $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$, on peut alors tracer les droites $y = \frac{a}{b}$ et $x = \frac{c}{d}$, et nous avons alors nos quatre zones A, B, C, D.
   En reprenant le système, on peut en déduire le signe de x' et y' selon la zone ou l'on se trouve, encore une fois indiquée sur le schéma.
   Sans perte de généralité, supposons que nous commençons dans la zone A, c'est à dire que (x_0, y_0) est dans la zone A. On va montrer que notre solution quitte la zone A par l'absurde.
   Supposons que notre trajectoire reste toujours dans cette zone A. Comme $x' \geq 0$ et $y' \leq 0$, alors la fonction c est croissante et y décroissante. Comme x est majorée par $\frac{c}{d}$ et y minorée

par 0, on en déduit que les deux fonctions ont une limite en $+\infty$. On en déduit que leur dérivée ne peuvent donc pas exploser (sinon leur limite en l'infinie ne serait pas finie), et donc x' et y' ont aussi une limité en $+\infty$, qui est donc forcément nul pour ne pas exploser.
On a que $\lim\limits_{t\to+\infty} y'(t) = 0 = \lim\limits_{t\to+\infty} ax(t) - bx(t)y(t)$. Donc $\lim\limits_{t\to+\infty} ax(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} bx(t)y(t)$.Comme x ne peut tendre vers 0, on peut diviser par $x(t)$ et on en déduit que $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = \frac{a}{b}$. Si $y_0 < \frac{a}{b}$, alors cela contredit la décroissance de y et si $y_0 = \frac{a}{b}$, alors y est constante, donc y' est nul, et donc x est constante égale à $\frac{c}{d}$, ce qui est impossible aussi.
On en déduit que l'on va quitter la zone A.
On note $t_1 = \{t > 0, (x(t), y(t)) \notin A\}$. Par continuité on a forcément $x(t_1) = \frac{c}{d}$ et $y(t_1) < \frac{a}{b}$. On a alors $y'(t_1) = 0$ et $x'(t_1) > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que, pour $r \in]t_1, t_1 + \eta[$ la trajectoire se trouve dans la zone B définie par $x > \frac{c}{d}$ et $y < \frac{a}{b}$. On a que c et y sont croissantes dans cette zone, et ont encore des limites finies car bornées. Donc on a encore que x' et y' ont pour limite 0, et donc x et y ont pour limites respectives $\frac{c}{d}$ et $\frac{a}{b}$, ce qui est encire une fois absurde car $x(t_1 + \eta) > \frac{c}{d}$. De sorte qu'il existe t_2 tel que $y(t_2) = \frac{a}{b}$. On rentre dans la zone C, puis D et ainsi de suite.

Il reste à montrer la périodicité de la trajectoire.
Pour cela, on remarque que la fonction $y \mapsto H(\frac{c}{d}, y) = m + g(y)$ est croissante strictement sur $[\frac{a}{b}, +\infty[$. Comme H est constante sur une trajectoire, celle-ci ne peut passer que par un unique point de la demi-droite $x = \frac{c}{d}$,$y \geq \frac{a}{b}$.
Or à chaque passage entre la zone A et B, on passe par ce point. Il est donc obtenue une infinité de fois. Si on note t_1 et t_2 deux dates de passage en ce point, le théorème de Cauchy-Lipschitz montre que x et y sont $T = t_2 - t_1$ périodiques.
En effet, considérons les fonctions x_1 et y_1 définies sur $\mathbb{R}$ par $x_1(t) = x(t+T)$ et $y_1(t) = y(t+T)$. On a, pour tout t de $\mathbb{R}$:

$$x_1'(t) = x'(t+T) = ax(t+T) - bx(t+T)y(t+T) = ax_1(t) - bx_1(t)y_1(t)$$

On a de même pour $y_1'(t)$. On a que (x_1, y_1) est aussi solution du système, et comme $x_1(t_1) = x(t_2) = x(t_1)$ et $y_1(t_1) = y(t_1)$, d'après unicité de Cauchy-Lipschitz, on obtient finalement que $x = x_1$ et $y = y_1$. On en déduit que les fonction x et y sont $T-$périodiques.

4. On obtient comme valeur moyenne que $\int_0^T \frac{y'}{y} = [lny]_0^T = 0$ car y est $T-$périodique. En remplaçant y' par $-cy + dxy$ on obtient directement $\frac{1}{T}\int_0^T x = \frac{c}{d}$. Il vient de même $\frac{1}{T}\int_0^T y = \frac{a}{b}$.
Rajoutons de la pêche. Les bateaux prélèvent un même taux de sardines et de requins ce qui revient à ajouter un terme $-\epsilon x$ à la première équation et $-\epsilon y$ à la seconde.
Cela consiste donc simplement à remplacer a par $a - \epsilon$ et c par $c + \epsilon$. On constate alors que la moyenne des arines devient $\frac{c+\epsilon}{d}$ et la moyenne des requins $\frac{a-\epsilon}{b}$. Autrement dit, la pêche favorise les sardines.

> Aussi étrange que cela puisse paraître, ce phénomène a été observé expérimentalement (la proportion de requins pêchés en mer Adriatique était plus élevée que la normale pendant la première guerre mondiale, période durant laquelle la pêche était réduite). C'est même la recherche d'une explication d ces observations qui a motivé les travaux de Volterra.